Wojciech P. Grygiel

SIŁA SYMETRII: O SYMETRII W FILOZOFII I W FIZYCE

THE POWER OF SYMMETRY: ON SYMMETRY IN PHILOSOPHY AND PHYSICS

SUMMARY

Symmetry is one of the fundamental concepts in the description of properties of the physical reality that has been introduced by the philosophers of the ancient Greece. Although it has changed its meaning upon the migration into the formalized language of the contemporary sciences, it has remained a key conceptual tool in the mathematical formulation of the physical laws thanks to the group theory. The purpose of the presented study is to survey the origins and the transformation of the notion of symmetry in science and to demonstrate its power in the explanation of the natural phenomena. Some perspectives that reach beyod the group theoretical meaning of symmetry will also be discussed. Finally, a preliminary account of the possible ontology of the invariants will be discussed with particular emphasis on the Hilbert's invariant theorem.

KEYWORDS: symmetry, invariants, the Erlangen program, group theory, ontology.

Wprowadzenie

W doświadczeniu otaczającego świata symetria towarzyszy nam praktycznie na każdym kroku. Z jednej strony, symetrię wykrywamy w najprostszych przedmiotach codziennego użytku czy też bliskiej nam przyrody, z drugiej jednak, wrażeniem symetrii uzasadniamy piękno gotyckich katedr czy też Bachowskiej fugi[1]. Zdarza się również, że zaskakuje nas brak symetrii, choćby w przypadku odbicia naszej twarzy w lustrze. Stwierdzamy wówczas, że symetria ta uległa złamaniu. Celem niniejszego opracowania jest pokazanie siły symetrii w jej unifikacyjnym potencjale, pozwalającym przy jej pomocy obejmować jednolitym opisem te obszary rzeczywistości, które uważane były wcześniej za rozłączne. Zademonstrowaniu tej szczególnej własności symetrii służyć będzie perspektywa diachroniczna, czyli historyczna panorama zastosowań tego pojęcia w konceptualizacji rzeczywistości, począwszy od czasów filozofii antycznej Grecji do wysoce sformalizowanych współczesnych teorii fizycznych. Przykładowo, wykorzystanie *grupy Galileusza* zaowocowało unifikacją ruchu i spoczynku w klasie ruchów inercjalnych, natomiast zastosowanie *grupy Lorentza* pozwoliło na unifikację mechaniki newtonowskiej z elektromagnetyzmem w postaci szczególnej teorii względności Einsteina[2]. W chwili obecnej fizyka również stoi przed wielkim wyzwaniem unifikacji ogólnej teorii względności i teorii kwantów, mającej zaowocować zunifikowaną teorią kwantowej grawitacji[3]. Tak rozumiana siła symetrii wzrastać będzie wraz z uzyskiwaniem przez nią *sformalizowanego* i *abstrakcyjnego* charakteru.

Charakter formalny symetrii przejawia się w tym, że w swoim teoriogrupowym określeniu wkomponowuje się ona jako integralny element matematycznej struktury teorii, natomiast jej charakter abstrakcyjny tkwi w jej niesprowadzalności do jakichkolwiek struktur zjawiskowych, postrzeganych w poznaniu potocznym. Mowa tutaj o transformacji pojęcia symetrii od prostych, zauważalnych gołym okiem proporcji do formalizacji symetrii przy pomocy zaawansowanych narzędzi matematyki, jakim jest przykładowo grupoid. Efekt taki jest zresztą typowy dla wszelkich formalizmów matematycznych, które wypracowuje się dla stałego poszerzania opisu rzeczywistości, w miarę jak dostępny staje się coraz bogatszy materiał empiryczny, pozyskiwany przy zastosowaniu skomplikowanych technik doświadczalnych. Dzięki przeprowadzonym analizom pojęcia symetrii uwidoczni się dodatkowo ciągłość i kumulatywność rozwoju konceptualnych ujęć rzeczywistości oraz złożonych ścieżek ich powstawania, wskazując, że symetria może stanowić integralną składową struktury rzeczywistości na jej najbardziej fundamentalnym poziomie.

[1] Por. np. A. Brożek, *Symetria w muzyce*, Tarnów 2004.

[2] Por. np. A. Zee, *Fearful Symmetry*, Princeton–Oxford 2007.

[3] Por. np. L. Smolin, *Trzy drogi kwantowej grawitacji*, Warszawa 2001; C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge 2004.

Zagadnienie to stanowi dziś bowiem przedmiot ożywionej debaty filozoficznej[4]. Zwieńczeniem rozważań niniejszego opracowania będzie zaprezentowanie takiej struktury jako ontologii niezmienników, inspirowanej programem erlangeńskim oraz matematyczną teorią niezmienników.

Od proporcji do niezmienniczości

Jak już zasygnalizowano powyżej, pojęcie symetrii posiada swoje korzenie w myśli starożytnej Grecji. O jego pierwotnej treściowej zawartości przekonuje etymologia. Słowo symetria składa się bowiem z dwóch elementów: (1) *συν*, tłumaczonego jako „razem", „wspólnie" oraz (2) μετρον, oznaczającego miarę. W sugerowanym etymologią znaczeniu symetria tożsama jest więc ze *współmiernością*. Takie też rozumienie symetrii pojawia się w *Elementach* Euklidesa. Myśl grecka nadała temu pojęciu ostatecznie dużo głębsze znaczenie, oparte na relacji proporcji, wyrażonej w liczbach naturalnych, która to relacja spełniała fundamentalną rolę harmonizowania różnych od siebie elementów w jednolitą całość. W ten sposób pojęcie symetrii stało się kluczowe dla wyrażenia idei harmonii, piękna i jedności[5]. Innymi słowy, postrzeganie w świecie złożoności i przeciwnych sobie tendencji stanowi podstawę do twierdzenia, iż na głębszych poziomach rzeczywistości wspomniane elementy muszą być przy pomocy elementów harmonii spojone w jedno.

Głównym nurtem tego typu myślenia była doktryna wypracowana przez szkołę pitagorejską, przejęta i rozwinięta później przez Platona[6]. Jako stosowny przykład warto tutaj przytoczyć słynne twierdzenie Talesa, które mówi, że *prosta równoległa do jednego z boków trójkąta dzieli pozostałe boki na części proporcjonalne*. Na podkreślenie zasługuje pitagorejska koncepcja dowodzenia tego twierdzenia, wedle której dowód polega na znalezieniu takiego odcinka, który mieściłby się w każdym z boków określoną ilość razy[7]. Występująca tutaj harmonia wyraża się stałym stosunkiem dwóch liczb, jednoznacznie wskazując na głębokie znaczenie liczby dla wyrażenia regularności w przyrodzie, tworzących jej harmonijną całość. W tym momencie warto poczynić dwie istotne uwagi. Po pierwsze, sprawiająca wrażenie wszechogarniającej zasady

[4] Por. np. K. Brading, E. Castellani (red.), *Symmetries in Physics. Philosophical Reflections*, Cambridge 2003; S. French, *The Structure of the World*, Oxford 2014.

[5] Por. np. W. Tatarkiewicz, *O filozofii i sztuce*, Warszawa 1986, s. 176–205.

[6] Por. np. M.C. Ghyka, *Złota liczba*, tłum. I. Kania, Kraków 2001, s. 19–40.

[7] M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, Warszawa 2006, s. 50–52.

pitagorejska symetria jako proporcja dwóch liczb naturalnych szybko straciła swoją adekwatność w momencie, gdy taką proporcją chciano objąć przykładowo przekątną kwadratu, niewymierną w stosunku do boku kwadratu. Choć poskutkowało to upadkiem szkoły pitagorejskiej, to jednak nie wyeliminowało to przekonania o matematycznym charakterze przyrody, co przywodzi nas do drugiej wzmiankowanej uwagi. Harmonia przyrody wyrażona przy pomocy relacji matematycznych zaczęła bowiem ugruntowywać pogląd, że fundamentalny poziom przyrody zbudowany jest według struktur matematycznych. Być może więc pitagorejska proporcja liczb naturalnych okazała się zbyt słabym narzędziem dla szerszego opisu rzeczywistości, a jedynie pozostawała adekwatna w jej bardzo ograniczonym zakresie, odkrywając jednak jakiś – choć niewielki – element tajemnicy Wszechświata.

Myślicielem, który pozostawał pod bardzo głębokim wpływem szkoły pitagorejskiej, zwłaszcza w późniejszym etapie swojej twórczości, był wspomniany już Platon. Swoją geometryczną koncepcję struktury rzeczywistości przedstawił on w *Timajosie*, gdzie o proporcji harmonizującej pozornie różne elementy w jednolitą całość pisze następująco:

> A dwa pierwiastki odosobnione nie mogą się pięknie trzymać razem bez czegoś trzeciego. Musi być między nimi jakiś czynnik wiążący. A najpiękniejszy łącznik taki, który jak najbardziej jedność stanowi ze składnikami. Najpiękniej potrafi tego dokazać proporcja[8].

Wyrażone w powyższym cytacie przekonanie Platona znajduje swoje odzwierciedlenie w jego koncepcji związania czterech żywiołów z wielościanami foremnymi. Choć wyjaśnienia Platona, dotyczące sposobu łączenia się i przenikania tych żywiołów, są dość niejasne i zawiłe, to jednak sama idea, że dzieje się to w oparciu o powiązania atomów poszczególnych żywiołów w stosunkach geometrycznych, pokazuje, że struktura materii podlega harmonicznemu zestrojeniu według reguł symetrii[9]. W tym momencie warto jeszcze dodać, iż za właściwego prekursora współczesnej koncepcji matematyczności przyrody uważa się ucznia Platona, Ksenokratesa, który *de facto* utożsamia matematykę z ontologią[10]. Platońska idea konstrukcji świata, oparta na wielościanach foremnych, odżyła również w modelu Wszechświata, jaką skonstru-

[8] Platon, *Timajos*, 31c.

[9] W. Witwicki, *Objaśnienia do „Timajosa" Platona*, w: Platon, *Timajos*, tłum. W. Witwicki, Kety 2002, s. 55–56.

[10] Por. np. B. Dembiński, *Późny Platon i Stara Akademia*, Kęty 2010, s. 49.

ował w okresie renesansu niemiecki astronom Johannes Kepler (1571–1630). Postulował on bowiem, że między sfery współśrodkowe unoszące planety Układu Słonecznego wpisać należy wielościany foremne, przez co wytłumaczyć będzie można proporcje orbit, jak i ostateczną liczbę planet. Z oczywistych więc powodów koncepcja ta nie znalazła dalszego zainteresowania ani zastosowania[11].

Sprzyjająca kontemplacji piękna i harmonii koncepcja symetrii oparta na proporcji zaczęła jednak w okresie renesansu ustępować innemu jej rozumieniu, które choć mniej intuicyjne, to dzięki swojemu bardziej abstrakcyjnemu charakterowi pozwoliło symetrii stać się potężnym narzędziem zmatematyzowanych teorii fizycznych. Z pozoru zmiana nie wydaje istotna, ponieważ zamiast w argumentach z symetrii akcentować *podobieństwo* związanych nią obiektów, uwagę skupia się na ściśle określonych aspektach ich *równoważności*. W czysto jakościowym oglądzie prekursorem tego paradygmatu w okresie renesansu był francuski architekt i lekarz, Claude Perrault (1613–1688). W swoim tłumaczeniu *De architectura* Witruwiusza przedstawił on krytykę pojęcia symetrii jako proporcji, opierając swój argument na arbitralności proporcji i wynikającej z niej percepcji piękna. W zamian za to zdefiniował symetrię jako relację, która wyraża odpowiedniość, występującą między dwoma pojedynczymi elementami danego obiektu w stosunku do jakiejś wyróżnionej jego cechy. Najlepszy przykład w tej materii stanowi *symetria odbiciowa*[12]. W kolejnym podrozdziale niniejszego opracowania okaże się jednak, że tego typu przemiana dojrzewała już od czasów matematycznych dociekań starożytnych cywilizacji, zanim nawet zrodziła się myśl starożytnej Grecji. Przemiana ta torowała więc drogę do sformułowania pojęcia symetrii w jej ścisłym naukowym sensie.

Od symetrii matematycznych równań do teorii grup

Odkrycie *teorii grup*, kluczowej dla matematycznie ścisłego pojęcia symetrii, dokonało się nie na gruncie geometrii jako analizy kształtów i stosunków przestrzennych, ale na gruncie *algebry*. Obok geometrii, algebra to również jeden z najstarszych działów matematyki, pierwotnie dotyczący metod roz-

[11] Por. np. E.M. Rogers, *Fizyka dla dociekliwych. Astronomia. Rozwój teorii astronomicznych*, tłum. M. Kubiak, Warszawa 1976, s. 136–162.

[12] Por. np. G. Hon, B.R. Goldstein, *From Summetria to Symmetry: The Making of a Scientific Revolutionary Concept*, „Springer" 2008, s. 127–133.

wiązywania równań. Odkąd jednak symbole literowe pojawiły się w arytmetyce, algebra przekształciła się w naukę o działaniach na symbolach i w takim znaczeniu praktykowana jest do dzisiaj. Aby więc dostrzec, w jaki sposób na gruncie rozwiązywania równań algebraicznych symetria ujawniła swoją siłę jako formalne narzędzie, warto obecnie krótko przypomnieć stosowne etapy historii matematyki w tym zakresie.

Zagadnienie rozwiązywania równań było istotnym elementem matematycznych zmagań już w cywilizacji babilońskiej, czyli nawet dwa tysiące lat przed Chrystusem. W tej materii babilończycy wypracowali skuteczne metody rozwiązywania równań kwadratowych i sześciennych. Nie dysponowali oni jednak współcześnie znanymi wzorami algebraicznymi, ale posługiwali się algorytmicznymi procedurami, dającymi poprawne rezultaty, gdy te same operacje przeprowadzano na szeregu liczb, analogicznie do współczesnych metod numerycznych. Warto jednak pamiętać, że operacje te były *de facto* równoważne stosowaniu metody rozwiązywania równań algebraicznych przy pomocy *pierwiastników*, czyli wyrażeń, w skład których wchodzą sumy, iloczyny, potęgi i pierwiastki współczynników danego równania. Powszechnie znanym przykładem pierwiastnika jest wyróżnik równania kwadratowego, oznaczany jako delta (Δ). W ten sposób babilończycy nie tylko osiągnęli sprawność w kwestiach praktycznych, takich jak handel czy pobór podatków, ale również w zdobywaniu wiedzy o przyrodzie, głównie astronomii oraz technik agralnych.

W rozwoju algebry trudno także odmawiać udziału Grekom, a szczególnie postaci Diofantosa, któremu przypisuje się wprowadzenie około roku 500 przed Chrystusem symboli do algebry. W swoim dziele *Arithmetica* Diofantos zademonstrował techniki rozwiązywania równań liniowych, kwadratowych oraz sześciennych, a jego imieniem określa się klasę równań, zwanych *diofantycznymi*, które posiadają rozwiązania w zbiorze liczb całkowitych. Rzecz zresztą posiada swoje znaczenie do dziś, choćby w postaci słynnego *ostatniego twierdzenia Fermata* (1637), wedle którego nie istnieją większe od kwadratu sumy potęg dwóch liczb naturalnych, będące potęgą innej liczby naturalnej. Twierdzenie to zostało dopiero udowodnione w 1993 roku przez Andrew Wilesa[13].

W okresie średniowiecza problematyka rozwiązywalności równań algebraicznych znalazła swoich kontynuatorów wśród myślicieli arabskich i perskich, wśród których ważną dla tej problematyki rolę odgrywa Omar Chajjam

[13] Por. np. A.D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, Warszawa 1998.

(1048–1131). W wypracowywaniu metod rozwiązań równań sześciennych oparł się on na znanej już Grekom metodzie przy użyciu krzywych stożkowych i uzyskał rozwiązania czternastu typów równań trzeciego stopnia. Kolejne osiągnięcia matematyczne, począwszy od okresu renesansu, należą jednak już ściśle do dziedzictwa europejskiego, gdzie w tym okresie istotną rolę odegrali matematycy włoscy, jak choćby Niccolò Fontana, znany bardziej jako Tartaglia, oraz Girolamo Cardano[14]. Podali oni bowiem algebraiczne rozwiązania równań trzeciego i czwartego stopnia przy użyciu metody pierwiastników, będące naturalnym rozwinięciem metod wypracowanych przez matematyków babilońskich. Twórcze napięcie w temacie wywołało niewątpliwie udowodnienie przez Karla Friedricha Gaussa *Podstawowego Twierdzenia Algebry.* Twierdzenie to orzeka, że w zbiorze liczb zespolonych każde równanie posiada tyle pierwiastków, ile wynosi jego stopień. Zmagania ze znalezieniem rozwiązań trwały jednak nadal i dzięki pracom znanego z osiągnięć w analizie matematycznej Josepha-Louisa Lagrange'a udało się wstępnie zrozumieć, dlaczego kontynuowana od czasów starożytnych metoda znajdywania pierwiastków równań *piątego stopnia* przy pomocy pierwiastników napotyka na nieprzezwyciężalne ograniczenia.

Z radykalną pomocą w ostatecznym wyjaśnieniu przyszło pojęcie *permutacji*, czyli zamiany kolejności elementów zbioru. W szczególności jednak, co okaże się niezwykle istotne z punktu widzenia pojęcia grupy, włoski matematyk Paolo Ruffini (1765–1822) wprowadził ideę składania czyli mnożenia przez siebie permutacji, dającego w efekcie inną permutację. W zastosowaniu do analizy rozwiązań równania piątego stopnia pozwolił on Ruffiniemu stwierdzić, że takie rozwiązania nie istnieją, co jednak nie okazało się rozstrzygnięciem poprawnym. Poprawny dowód dla pewnej klasy takich równań sformułował dopiero norweski matematyk Niels Abel (1802–1829), co jednak nadal nie pozwoliło uzyskać pełnej odpowiedzi na pytanie, dlaczego tak jest. Uczynił to ostatecznie francuski matematyk Évariste Galois (1811–1832), o którego wpływie na historię matematyki Ian Stewart pisze następująco:

> Galois wprowadził do matematyki nowy punkt widzenia, zmienił jej treść i wykonał niezbędny, lecz mało znany krok ku abstrakcji. W rękach Galois matematyka przestała być studium liczb i kształtów – arytmetyki, geometrii i po-

[14] Por. np. M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, dz. cyt., s. 112–121.

> mysłów, które z nich powstały, jak algebra i trygonometria. Stała się studium *struktury*. To, co było studium rzeczy, stało się studium *procesów*[15].

Badając własności permutacji w oparciu o pierwiastki równań algebraicznych, Galois – podobnie jak jego wspomniani poprzednicy – analizował własności mnożenia permutacji tych pierwiastków i zauważył, że iloczyn permutacji też jest permutacją. Zbiór permutacji, który w wyniku złożenia każdych dwóch z nich generuje permutację, będącą elementem tego zbioru, Galois określił mianem *grupy*. Co więcej, każdy podzbiór permutacji, który przejawia również takie własności, nazywa się *podgrupą*. Aby zdefiniować grupę, trzeba wpierw wskazać pewien zbiór elementów G, na którym określone jest iloczyn $\otimes$. Aksjomaty grupy są następujące:

- *wewnętrzność*: dla dwóch dowolnych elementów g_i, g_j, należących do zbioru G, ich iloczyn $g_i \otimes g_j$ również należy do zbioru G,
- *neutralność*: w zbiorze G musi istnieć element neutralny e, taki, że dla każdego elementu g_i, $g_i \otimes e = e \otimes g_i = g_i$,
- *odwrotność*: dla każdego elementu g_i w zbiorze G musi istnieć element odwrotny g_i^{-1}, taki, że $g_i \otimes g_i^{-1} = g_i^{-1} \otimes g_i = 1$,
- *łączność*: $(g_i \otimes g_j) \otimes g_k = g_i \otimes (g_j \otimes g_k)$.

W tym momencie można już dostrzec, jaki związek zachodzi między pojęciem grupy i symetrii oraz dlaczego teorię grup uważać można za formalizację pojęcia symetrii. Okazuje się bowiem, że permutacje pierwiastków mogą zachowywać pewne związki między pierwiastkami, stając się w takiej sytuacji *elementem symetrii*, ponieważ działanie permutacji, czyli zmiany kolejności pierwiastków, nie zmienia postaci danego związku. Z każdym równaniem algebraicznym można w takim układzie związać grupę symetrii, zwaną *grupą Galois*. Grupa Galois stanowi zawsze podgrupę permutacji pierwiastków danego równania. Nie wnikając obecnie w techniczne szczegóły tego twierdzenia, warto zasygnalizować, iż pozwala ono dokładnie wyjaśnić, dlaczego nie ma możliwości otrzymania rozwiązań równań wielomianowych piątego stopnia metodą pierwiastników, choć o ich istnieniu przekonuje nas Podstawowe Twierdzenie Algebry.

Jak zresztą sygnalizowane było już w powyższym cytacie, wprowadzając pojęcie grupy, Galois dostarczył matematyce narzędzia, które w niedługim czasie ujawniło swój unifikacyjny potencjał, dający podstawę uwspólnionego

[15] I. Stewart, *Dlaczego prawda jest piękna. O symetrii w matematyce i w fizyce*, Warszawa 2012, s. 148.

teoretycznego opisu wielu aspektów rzeczywistości, dotąd uważanych za rozłączne. Przykładowo, teoria grup zaczęła odgrywać istotną rolę w geometrii, pozwalając na ścisły opis symetrii obiektów geometrycznych. Stewart podkreśla, iż w takim rozumieniu symetrii bierze się pod uwagę trzy jej podstawowe elementy, obecne już zresztą w symetriach równań algebraicznych i na nich wzorowane: *przekształcenie*, *struktura* oraz *zachowanie*[16]. Symetrią jest bowiem takie przekształcenie, które działając na dany obiekt, pozostawia zachowaną jego strukturę, czyli sieć relacji występujących pomiędzy elementami konstytutywnymi danego obiektu. Przykładowo, działając na sześcian operacją symetrii względem jego środka, nie zaburza się struktury połączeń pomiędzy jego bokami, w efekcie czego struktura ta pozostaje w wyniku zastosowanej operacji zachowana albo, jak się to częściej używa, stanowi jej *niezmiennik*.

Zastosowanie teorii grup w matematyce i fizyce uzyskało kolejne nowe perspektywy dzięki opracowaniu przez francuskiego matematyka Camille'a Jordana (1838–1922) *teorii reprezentacji grup*. Krok ten stanowi ważne rozszerzenie zastosowań tej teorii od prostych permutacji do wielowymiarowych, abstrakcyjnych przestrzeni. Z kolei w tych przestrzeniach bardzo ważną rolę odgrywają *transformacje liniowe*, czyli takie, które zachowują współliniowość punktów. Transformacje takie tworzą *przestrzeń afiniczną*[17]. Z kolei angielski matematyk Arthur Cayley (1821–1895) pokazał, że każdą transformację liniową można przedstawić w postaci macierzy, w rezultacie czego teoria reprezentacji umożliwiła *reprezentowanie* działań grupowych w postaci algebry macierzy i w ten sposób dostarczyła narzędzia do wykonywania skomplikowanych obliczeń[18]. Warto w tym momencie zaznaczyć, że dotychczas omawiane grupy posiadają charakter *dyskretny*, to znaczy, że w ich skład wchodzi skończona ilość elementów.

Natomiast krokiem, który pozwoli teorii grup prawdziwie zdominować fizykę, jest odkrycie zastosowań tej teorii dla równań różniczkowych, tym razem jednak dla bardzo specyficznego rodzaju grup, jakimi są *grupy (symetrie) ciągłe*. Ich związek z równaniami różniczkowymi jest o tyle ważny, że równania te stanowią podstawowe narzędzie fizyki w opisie zmian wartości wielkości fizycznych. Wszystkie podstawowe prawa fizyki klasycznej – i mechaniki kwantowej zresztą też – sformułowane są bowiem w postaci równań różnicz-

[16] Tamże, s. 158–160.

[17] Por. np. A. Herdegen, *Wykłady z algebry liniowej i geometrii*, Kraków 2005, s. 314–368.

[18] Por. np. C.J. Isham, *Lectures on Groups and Vector Spaces for Physicists, Word Scientific*, Singapore 1989, s. 113–157.

kowych. Co więcej, symetrie ciągłe wydają się nawet bardziej powszechne i łatwiej zauważalne niż symetrie omawiane do tej pory symetrie dyskretne. Głównym badaczem symetrii ciągłych i twórcą stosownej teorii był norweski matematyk Sophus Lie (1842–1899). Przykłady symetrii ciągłych wskazać jest bardzo łatwo, do takich należy choćby symetria okręgu, który można wokół jego własnego środka obrócić o dowolny kąt, pozostawiając dany okrąg w niezmienionej postaci. Grupa symetrii okręgu zawiera więc nieskończenie wiele elementów i jest denotowana jako SO(2), gdzie symbol „O" oznacza ortogonalność, czyli własność sztywnych przekształceń płaszczyzny, a „S" wyklucza tak zwane *obroty niewłaściwe*, czyli obroty związane z symetrią odbiciową względem płaszczyzny okręgu. Grupa SO(2) stanowi również przykład szczególnej klasy grup, zwanych *grupami Liego*, które mogą być poddane linearyzacji[19]. Symetrie ciągłe w fizyce implikują istniene zasad zachowania, czego w postaci słynnego twierdzenia dowiodła niemiecka matematyczka, Emmy Noether (1882–1935)[20]. W fizyce odpowiednie symetrie ciągłe charakteryzują własności czasu i przestrzeni, co w prawach przyrody przejawia się jako zasada zachowania energii, zasada zachowania pędu i zasada zachowania momentu pędu.

Fizyka klasyczna: symetria teorii czasu i przestrzeni

O ile kategorii czasu i przestrzeni używa się powszechnie w języku potocznym, o tyle raczej trudno wyobrazić sobie, w jaki sposób mogą podlegać one regułom symetrii i opisowi przy pomocy teorii grup. Mówiąc krótko, dużo łatwiej zauważyć symetrię płatków śniegu i mówić o niej niż o symetrii czasu i przestrzeni. Trzeba jednak pamiętać, że symetria czasoprzestrzenna jako symetria ciągła jest fundamentalna w fizyce klasycznej, gdzie ruch ciał opisuje się przy pomocy *praw dynamiki*, przedstawiających wartości wielkości fizycznych, takich jak siła, przyspieszenie czy prędkość jako funkcje czasu i przestrzeni. Struktura czasoprzestrzeni, określona między innymi przez odpowiadającą jej symetrię, zakodowana jest w równaniach dynamiki. Przemiany struktury czasoprzestrzeni na przestrzeni historii fizyki odzwierciedlają więc historię rozwoju samej dynamiki i ich źródeł należy doszukiwać się już w myśli starożytnej Grecji, a szczególnie w dynamice Arystotelesa. Oczywiście dynamika ta

---

[19] Por. tamże, s. 20–56.

[20] Por. np. K. Brading, H.R. Brown, *Symmetries and Noether's Theroems*, w: K. Brading, E. Castellani (red.), *Symmetries in Physics*, dz. cyt., s. 89-109.

nie została sformułowana językiem współczesnej fizyki. Tym niemniej istnieją jej nowoczesne stylizacje, pozwalające sformułować ją we współczesnym rozumieniu pojęcia czasoprzestrzeni i podać odpowiednie równania[21]. Pierwszym natomiast, który zaproponował termin *czasoprzestrzeń Arystotelesa*, był Roger Penrose[22]. W ramach niniejszego opracowania ukazane zostaną cztery główne etapy przemian czasoprzestrzeni i odpowiadających im symetrii, prowadzące do stopniowego uogólnienia fizycznego opisu ruchu od unifikacji ruchu i spoczynku dla układów inercjalnych w teorii Galileusza do ogólnej teorii względności, gdzie równanie pola Einsteina obowiązuje dla wszystkich możliwych układów poruszających się z przyspieszeniem[23].

Dobrym punktem odniesienia dla analizy symetrii czasoprzestrzeni jest ciągła grupa wszystkich sztywnych ruchów płaszczyzny w przestrzeni trójwymiarowej, która nosi techniczną nazwę *grupy Euklidesa* i oznaczana jest symbolem E(2). Do ruchów takich zaliczyć należy wszystkie przesunięcia płaszczyzny, obroty oraz odbicia. Przekształcenie współrzędnej dowolnego punktu x należącego do płaszczyzny zadane więc będzie następującym równaniem:

$$x' = \mathbf{R}x + a,$$

gdzie $\mathbf{R}$ jest ortogonalną macierzą obrotu, natomiast a jest skalarem przesunięcia. Symetria zadana grupą Euklidesa opisuje sytuację, w której wszystkie punkty przestrzeni trójwymiarowej posiadają absolutny charakter, co oznacza, że spoczynek może być odróżniony od ruchu po wskazaniu stosownego układu odniesienia. Takiej symetrii podporządkowane są równania mechaniki newtonowskiej dla wszystkich układów odniesienia, również tych poruszających się z przyspieszeniem. Jeżeli dodatkowo wyróżniony zostanie jeden absolutny spoczynek jako położenie uprzywilejowane, wówczas takie obniżenie symetrii odpowiada dynamice arystotelesowskiej, a transformacje współrzędnej x określone są następująco:

$$x' = \mathbf{R}x.$$

[21] Por. np. A. Trautman, *A Classification of Space-Time Structures*, „Reports on Mathematical Physics" 10 (1976), s. 297–310; D.J. Raine, M. Heller, *The Science of Space-Time*, Tucson 1981.

[22] R. Penrose, *The Structure of Space-time*, w: C.M. DeWitt, J.A. Wheeler (red.), *Battelle Recontres*, New York 1968, s. 121–235.

[23] Por. np. J. Earman, *World Enough and Space-Time. Absolute versus Relational Theories of Space and Time*, Cambridge–London 1989; M. Heller, *Teoretyczne podstawy kosmologii*, Warszawa 1988, s. 148–164.

Nietrudno zauważyć, że ani dynamika newtonowska, ani tym bardziej dynamika arystotelesowska nie unifikują ruchu i spoczynku. Dzieje się to dopiero po wprowadzeniu dodatkowego elementu symetrii, wynikającego z ruchu jednostajnego prostoliniowego, właściwego inercjalnym układom odniesienia. Stosowne równanie transformacyjne przybiera wówczas następującą postać:

$$x' = \mathbf{R}x + a - \mathbf{v}t.$$

Równanie to odpowiada symetriom *grupy Galileusza*, która jako swoje elementy zawiera obroty oraz przesunięcia płaszczyzny wzbogacone o symetrię ruchów jednostajnych prostoliniowych. W kontekście tej dyskusji trzeba również koniecznie odnotować, że dotychczas omówione symetrie dotyczą jedynie współrzędnych przestrzennych i nie uwzględniają czasu. W grupie Euklidesa oraz Galileusza czas podporządkowany jest *innej* symetrii, wynikającej jedynie z przesunięcia na jednowymiarowej skali czasu, co skutkuje niezależnością wymiaru przestrzennego i czasowego. Jeżeli do tej sytuacji zastosuje sie teraz wspomniane powyżej twierdzenie Noether, to pozwala ono na wytłumaczenie istnienia osobnych zasad zachowania energii (symetria translacyjna czasu), zasady zachowania pędu (symetria translacyjna przestrzeni) oraz zasady zachowania momentu pędu (symetria rotacyjna przestrzeni).

W kolejnym kroku unifikacyjnym, jakim jest sformułowanie przez Alberta Einsteina szczególnej teorii względności w roku 1905, czas i przestrzeń objęte zostają jedną ciągłą grupą symetrii obrotów hiperbolicznych, zwaną *grupą Lorentza*[24]. Dzieje się tak wskutek uwzględnienia w dynamice, której odpowiada grupa Galileusza, fundamentalnego osiągnięcia elektrodynamiki Maxwella, postulującej istnienie nieprzekraczalnej w przyrodzie prędkości c, równej prędkości rozchodzenia się światła w próżni. Podstawowym obiektem teoretycznym szczególnej teorii względności staje się *czterowymiarowa czasoprzestrzeń pseudoeuklidesowa*, zwana *czasoprzestrzenią Minkowskiego*. Najważniejszą cechą, odróżniającą ją od przestrzeni euklidesowej jest zmiana znaku przy współrzędnej czasowej w wyrażeniu na element liniowy na przeciwny w stosunku do współrzędnych przestrzennych. W rezultacie współrzędna czasowa kompensuje współrzędne przestrzenne, co skutkuje zanikiem niezależności wymiaru czasowego i wymiarów przestrzennych i istnienia jednej grupy symetrii Lorentza dla czasoprzestrzeni Minkowskiego. Co więcej,

[24] Por. np. M. Heller, *Some Mathematical Physics for Philosophers*, Vatican City–Rome 2005, s. 41–50.

skoro istnieje obecnie jedna symetria grupy Lorentza dla czasu i przestrzeni, zgodnie z twierdzeniem Noether oczekiwać należy, że pojawi się nowa zasada zachowania, wiążąca ze sobą rozłączne dotychczas zasady zachowania energii i pędu. I tak rzeczywiście jest, stosowna zasada zachowania z uwzględnieniem efektów relatywistycznych przybiera następującą postać:

$$E^2 = (mc^2)^2 + pc^2,$$

gdzie wielkości E i p reprezentują odpowiednio energię i pęd cząstki, natomiast wielkość mc^2 odpowiada energii spoczynkowej. Bezpośrednio więc z tej zasady bierze się słynny wzór Einsteina, wyrażający równoważność energii i masy spoczynkowej, $E = mc^2$.

Zgodnie z oryginalną intencją Einsteina sformułowanie przez niego ogólnej teorii względności miało być rozszerzeniem jej szczególnej postaci, obowiązującej dla układów inercjalnych, na wszystkie możliwe układy odniesienia, czyli takie, które poruszają się z przyspieszeniem. Stosując *zasadę ogólnej kowariantności*, Einstein dążył do całkowitego uniezależnienia sytuacji fizycznej od wyboru układów współrzędnych, czego wyrazem jest otrzymane przez niego *równanie pola*[25]. W nowoczesnym sformułowaniu ogólnej teorii względności modelem czasoprzestrzeni jest gładka (różniczkowa) czterowymiarowa rozmaitość różniczkowa M z metryką Lorentza **g**, co zapisuje się jako parę (M, **g**)[26]. Z punktu widzenia ważnej dla niniejszego opracowania symetrii, ogólna zasada kowariantności prowadzi do wniosku, że równoważność pomiędzy wszystkimi układami współrzędnych musi implikować ich nierozróżnialność dla dowolnej krzywizny, w efekcie czego fizyczne znaczenie posiada szczególna klasa czasoprzestrzeni, transformujących się między sobą w sposób gładki. Klasę tych czasoprzestrzeni wyznacza specjalna grupa gładkich przekształceń, działających na rozmaitości, zwanych *dyfeomorfizmami*[27]. Grupę taką oznacza się jako Diff(M). Ujmując rzecz obrazowo, działanie dyfeomorfizmu można zilustrować takimi przekształceniami kartki papieru, które nie powodują żadnych załamań (krawędzi), a jedynie lokalne zmiany krzywizny. I tutaj pojawia się bardzo istotna zmiana sensu symetrii z *globalnej* na *lokalną*, kluczowa dla teorii pola wyrażonej w języku teorii grup. Grupa Diff(M) działa bowiem te-

[25] J.D. Norton, *Did Einstein Stumble? The Debate over General Covariance*, „Erkenntnis" 42 (1995), s. 223–245.

[26] Por. np. M. Heller, *Teoretyczne podstawy kosmologii*, dz. cyt., s. 11–48.

[27] L. Sokołowski, *Elementy analizy tensorowej*, Warszawa 2010, s. 76–77.

raz lokalnie, gwarantując równoważność wszystkich układów odniesienia dla danej punktochwili. Warto zauważyć, że w momencie utożsamienia grawitacji z zakrzywieniem czasoprzestrzeni, czasoprzestrzeń straciła status niezależnej sceny, na której rozgrywają się procesy fizyczne, i sama uzyskała dynamiczny charakter. Skoro nie ma tutaj globalnej symetrii czasoprzestrzennej, nie sposób też zaaplikować twierdzenia Noether i uzasadnić w ramach ogólnej teorii względności istnienia zasad zachowania energii oraz pędu. Dyskusja ogólnej teorii względności jako teorii niezmienników grup dyfeomorfizmów kończy panoramę symetrii czasoprzestrzennych, pokazując z jednej strony ich unifikacyjny potencjał, z drugiej jednak sygnalizując, że osiągana jest tutaj swoista granica stosowalności topologicznego rozumienia czasoprzestrzeni jako zbioru punktów, któremu nadano odpowiednią strukturę[28].

Symetria poza czasem i przestrzenią

Biorąc pod uwagę fakt, że czas i przestrzeń stanowią najbardziej podstawowe kategorie opisu rzeczywistości fizycznej, należałoby się spodziewać, że związane z nimi symetrie są fundamentalnymi symetriami teorii fizycznych. Istotnie, rzecz ma się tak w przypadku dyskutowanej do tej pory fizyki klasycznej. W momencie jednak, gdy sformułowana zostaje mechanika kwantowa, znaczącą rolę zaczynają odgrywać symetrie *wewnętrzne*, niemające odniesień czasoprzestrzennych, wskazując, że pojęcie symetrii posiada bardziej uniwersalne znaczenie dla fizyki. Co więcej, uważa się nawet, że w mechanice kwantowej symetria przejawia się w bardziej fundamentalny sposób, niż miało to miejsce w fizyce klasycznej. Przykładowo, jak zauważa Eugene Wigner, liniowy charakter przestrzeni stanów mechaniki kwantowej, będącej *przestrzenią Hilberta* odpowiednich wektorów stanu, stwarza możliwość superpozycji stanów oraz definiowania ich przy pomocy reguł transformacyjnych, zgodnie z pewnymi nieprzywiedlnymi reprezentacjami grup symetrii[29]. W szczególności istotnym tutaj jest działanie operatorów na przestrzeni stanów, które, zgodnie z postulatami mechaniki kwantowej, związane są z obserwablami, czyli wielkościami mierzalnymi. Przykładowo, badanie własności reprezentacji nieprzywiedlnych symetrii danych obiektów fizycznych, takich jak cząsteczki

[28] Por. np. J. Earman, J.D. Norton, *What Price Spacetime Substantivalism*, „The British Journal for the Philosophy of Science" 38 (1987), s. 515–525.

[29] Por. np. E.P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Bloominghton–Indiana 1967, s. 47.

chemiczne, pozwala na wyznaczenie ich własności spektralnych, mierzonych bezpośrednio przy użyciu technik spektroskopowych[30].

Ważnym i w pewnym sensie pierwotnym z punktu widzenia kwantowo-mechanicznych zastosowań rodzajem symetrii jest *symetria permutacyjna*, o której była już mowa w kontekście rozwiązywalności równań algebraicznych. Symetria ta wiąże się z podstawową własnością cząstek kwantowych, jaką jest ich *nierozróżnialność*. Przejawia się to jako niezmienniczość własności pewnych układów fizycznych, jeżeli cząstki zamieni się miejscami. Innymi słowy, chodzi o pokazanie, że własności te są niezmiennikami grup permutacji. Przede wszystkim uwidacznia się to w tak zwanych statystykach kwantowych, gdzie wprowadzając wprost wymóg nierozróżnialności cząstek, otrzymuje się – zależnie od uwzględnienia zakazu Pauliego – dwie podstawowe statystyki. Statystyka *Fermiego-Diraca*, uwzględniająca ten zakaz, dotyczy cząstek takich jak przykładowo elektrony i protony, nazywanych *fermionami*. Cząstki te uczestniczą w budowie materii. Z kolei statystyka *Bosego – Einsteina* opisuje cząstki, określane mianem bozonów, które nie spełniają zakazu Pauliego i są odpowiedzialne za przenoszenie oddziaływań. Przykładowo, bozonem jest foton, przenoszący oddziaływania elektromagnetyczne[31]. Choć statystyki te, jak i leżące u ich podstaw grupy symetrii permutacyjnych, dają istotny wgląd w strukturę materii i naturę oddziaływań, to jednak pełne ich zrozumienie wymaga dalszego rozszerzenia pojęcia symetrii, jakie następuje w przypadku kwantowego opisu pól fizycznych.

Kwantowy opis pól fizycznych stał się możliwy dopiero w ramach unifikacji mechaniki kwantowej ze szczególną teorią względności. O ile mechanika kwantowa jest teorią zakładającą stałą ilość cząstek, o tyle dołączenie efektów relatywistycznych powoduje, że wymienność masy i energii ($E = mc^2$) umożliwia kreację i anihilację cząstek w połączeniu z odpowiadającymi im *antycząstkami*. Teoria cząstek staje się teraz teorią pól. Dwa typy symetrii odgrywają tutaj szczególną rolę. Pierwszy z nich to dyskretna *symetria CPT*, zakładająca niezmienniczość odpowiednich praw dynamiki ze względu na (1) C – sprzężenie ładunku czyli zamianę cząstek na antycząstki, (2) P – parzystość czyli operację odbicia lustrzanego oraz (3) T – zmianę kierunku czasu. Twierdzenie CPT mówi, że prawa dynamiki muszą być niezmiennicze względem C, P

[30] Por. np. A. Grodzicki, *Symetria cząsteczek i ich widma oscylacyjne*, Warszawa 1988.

[31] Wyczerpującą prezentację statystyk kwantowych można przykładowo znaleźć w: F. Huang, *Podstawy fizyki statystycznej*, tłum. M. Załuska-Kotur, Warszawa 2006, s. 93–108.

i T łącznie[32]. Drugi typ symetrii w kwantowej teorii pola wymaga kolejnych rozszerzeń pojęcia symetrii, jakim są posiadające ciągły charakter symetrie *lokalne* oraz symetrie *cechowania*. Symetrie lokalne, które wzmiankowano już powyżej, stanowią uogólnienie symetrii globalnych w takim zakresie, że w przypadku symetrii globalnych pewne cechy symetrii nie ulegają zmianie przy zmianie położenia w czasoprzestrzeni. Natomiast jeśli się wprowadzi pewien parametr, który różnicował będzie symetrie w zależności od czasoprzestrzennego położenia, wówczas symetrie te nabiorą charakteru lokalnego. Sam lokalny charakter symetrii nie jest jednak wystarczający i w teorii oddziaływań konieczne jest uwzględnienie *symetrii cechowania* (ang. *gauge symmetry*). Symetria cechowania ma miejsce wówczas, gdy w równaniach teorii pojawiają się wielkości, których zmiana nie wywołuje żadnej zmiany parametrów bezpośrednio mierzalnych. Innymi słowy, są one niezmiennicze względem transformacji cechowania. Jako najprostszy przykład podać można energię potencjalną U w równaniach mechaniki lub potencjał wektorowy $\vec{A}$ w równaniach elektrodynamiki. Lokalna symetria cechowania będzie więc oznaczała, że istnieją reguły transformacyjne, pozwalające na przemieszczanie się od punktu do punktu w czasoprzestrzeni z zachowaniem postaci lagranżianu, jak wymagane jest to w przypadku teorii pól kwantowych.

Pomijając obszerny fragment dyskusji specyfiki lokalnych symetrii cechowania, wskazać obecnie należy, jakie typy tych symetrii odpowiadają poszczególnym oddziaływaniom i jak przebiega ich unifikacja w ramach *standardowego modelu cząstek elementarnych*. Jak już wspominano powyżej, oddziaływania przenoszone są przez cząstki zwane bozonami. Za oddziaływania elektromagnetyczne pomiędzy naładowanymi cząstkami odpowiedzialne są *fotony*, które podlegają symetrii U(1) jako symetrii właściwej *elektrodynamice kwantowej*. Z kolei *oddziaływania jądrowe słabe* możliwe są dzięki bozonom Z, W^+ oraz W^-, opisywanym symetrią SU(2). Warto w tym momencie wspomnieć, że oddziaływania elektromagnetyczne oraz słabe zunifikowane są w jednej *teorii oddziaływań elektrosłabych*, sformułowanej przez Weinberga i Salama. Teorii tej właściwa jest łączna symetria SU(2)xU(1). Ostatecznie w ramach teorii, zwanej *chromodynamiką kwantową*, traktuje się *oddziaływania jądrowe silne*, realizujące symetrię SU(3), które przenoszone są przez *gluony*. W rezultacie całkowita symetrię właściwą standardowemu modelowi cząstek elementarnych zapisuje

[32] Por. np. S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych. Podstawy*, tłum. D. Rzążewska, Warszawa 2012, s. 268–270.

się jako SU(3)xSU(2)xU(1). Z teoretycznego punktu widzenia dla tego modelu było opracowanie teorii cechowania dla grup SU(N), zwanej *teorią Yanga–Millsa*. W plejadzie omawianych cząstek elementarnych i związanych z nimi symetrii zabrakło jeszcze *grawitonu* oraz *bozonu Higgsa*. O ile opis teoretyczny grawitonu w ramach teorii pól kwantowych zależy od sformułowania jeszcze nieistniejącej teorii kwantowej grawitacji, to wykryty niedawno bozon Higgsa znajduje swoje teoretyczne uzasadnienie w kolejnej odsłonie ewolucji pojęcia symetrii, jaką stanowi proces *łamania symetrii*.

Łamanie symetrii

Istnienie *bozonu Higgsa* przewidziano ponad pół wieku temu, natomiast potwierdzenie eksperymentalne uzyskano dopiero w lipcu 2012 roku w zderzaczu hadronów w CERN-ie w Szwajcarii. Odmienność natury bozonu Higgsa wynika z faktu, że o jego istnieniu nie decydują lokalne symetrie cechowania, jak to miało miejsce w przypadku oddziaływań elektromagnetycznych, jądrowych słabych i silnych. Istnienie bozonu Higgsa postuluje się w związku z wywoływanym związanym z nim polem *spontanicznym łamaniem* symetrii cechowania, dzięki któremu cząstki elementarne uzyskują masę[33]. Mówiąc najogólniej, efekt łamania symetrii będzie miał miejsce wówczas, gdy w badanym układzie z powodów, o których będzie dalej mowa, dochodzi do *obniżenia* jego symetrii. W języku teorii grup odpowiada to sytuacji, kiedy dany układ pozostaje niezmienniczy nie względem całej grupy symetrii, ale względem jej podgrupy. Uwzględnienie efektów łamania symetrii stanowi kolejny etap w rozszerzaniu stosowalności pojęcia symetrii w kontekście zmatematyzowanych teorii fizycznych.

Efekty łamania symetrii bardzo łatwo można zaobserwować w prostych warunkach laboratoryjnych podczas formowania się kryształów (np. soli kuchennej) z roztworów wodnych. Nie ulega wątpliwości, że powstanie kryształu wiąże się z wyłonieniem obiektu o bardzo precyzyjnie określonej strukturze z roztworu o bardzo jednorodnym charakterze, w którym cząsteczki są równomiernie rozłożone w całej objętości. Taki równomierny rozkład odpowiada bardzo wysokiej symetrii, natomiast powstanie kryształu wiąże się tutaj z jej obniżeniem do grupy, będącej podgrupą, mówiąc potocznie, „symetrii roz-

[33] Bardzo dobre wprowadzenie do fizycznej i filozoficznej problematyki łamania symetrii można znaleźć w: E. Castellani, *On the Meaning of the Symmetry Breaking*, w: K. Brading, E. Castellani, *Symmetries in Physics*, dz. cyt., s. 321-334.

tworu". W tym momencie warto poczynić jedną istotną uwagę i zaznaczyć, że struktura i symetria pozostają w stosunku do siebie w relacji odwrotności. Obiekty o niskiej symetrii mają bogatą strukturę, natomiast obiekty o symetrii wysokiej, zawierającej wiele możliwych operacji symetrii, posiadają strukturę ubogą. Hipotetycznie, można by wyobrazić sobie obiekt o nieskończonej symetrii, co jednak skutkowałoby brakiem jakiejkolwiek możliwości wskazania jego cech charakterystycznych i prowadziło do słusznych pytań o możliwość jego istnienia. Efekt łamania symetrii został po raz pierwszy poddany systematycznej analizie przez Piotra Curie, który badał własności piezoelektryczne kryształów. Rezultaty jego dociekań znane są dziś jako *zasady Curie*, które orzekają, że występowanie zjawiska fizycznego wskutek działania przyczyn wiąże się z obniżeniem symetrii ośrodka, w którym dane zjawisko zachodzi. Ujmując rzecz skrótowo, „dyssymetria jest tym, co wywołuje zjawiska"[34].

Z punktu widzenia współczesnych teorii fizycznych wyróżnia się dwa podstawowe mechanizmy łamania symetrii: *jawne* i *spontaniczne*. Gdy pod pojęciem symetrii teorii fizycznej rozumie się niezmienniczość postulowanych przez nią praw dynamiki względem grup przekształceń, obydwa mechanizmy uzyskują swoje precyzyjne wyjaśnienie. Zależnie od sformułowania dynamiki, odpowiedni lagranżian lub hamiltonian analizowanego układu może być albo ściśle niezmienniczy względem pewnej grupy symetrii, albo może w swojej strukturze bezpośrednio zawierać człony obniżające (łamiące) jego symetrię. W drugim przypadku jest oczywiste, że rozwiązania równań dynamiki charakteryzować się mogą obniżoną symetrią, która warunkowana jest wprost postacią lagnanżianu lub hamiltonianu. Taki efekt nosi miano *jawnego łamania symetrii* i ma przykładowo miejsce w przypadku naruszenia symetrii parzystości (odbicia lustrzanego) w kwantowej teorii pola, opisującej oddziaływania jądrowe słabe[35].

Znacznie bardziej ciekawa sytuacja ma jednak miejsce, wówczas, gdy choć lagranżian lub hamiltonian są ściśle niezmiennicze względem danej grupy symetrii, to jednak mogą istnieć rozwiązania równań dynamiki, niewykazujące niezmienniczości względem tej grupy. Mówi się wówczas o *spontanicznym łamaniu symetrii*. Jako przykład takiego efektu podaje się najczęściej zatemperowany ołówek postawiony na ostrzu i przytrzymywany palcem w pozy-

[34] P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, „Journal de Physique" 3 (1894), s. 393–417.

[35] Por. np. O. Pooley, *Handedness, Parity Violation and the Reality of Space*, w: K. Brading, E. Castellani, *Symmetries in Physics*, dz. cyt., s. 250–280.

cji pionowej. Z punktu widzenia symetrii równań dynamiki nie ma powodu, aby idealnie wypionowany ołówek upadł w momencie, kiedy przestanie być przytrzymywany. Doświadczenie jednak podpowiada, iż dzieje się dokładnie przeciwnie. Okazuje się bowiem, że układy tego typu pozostają w równowadze dopóki, dopóty nie zostanie przekroczony pewien parametr krytyczny, jak choćby siła wychylająca ołówek od pozycji pionowej. Dochodzi wówczas do zdestabilizowania tego stanu i wyłonienia się stanów o obniżonej symetrii, posiadających identyczne energie i powiązanych jednak ze sobą odpowiednimi transformacjami. Takie asymetryczne stany określa się mianem *stanów zdegenerowanych*, których kompletny zbiór spełnia reguły symetrii teorii.

Posiadając podstawowe zrozumienie mechanizmu łamania symetrii, można obecnie pokazać, jak w oparciu o ten mechanizm ściśle wyjaśnia się istnienie bozonu Higgsa i masy cząstek elementarnych. Sygnałem dla poszukiwań w tej materii była niezgodność teoretycznych przewidywań zerowej masy bozonów oddziaływań jądrowych słabych z jej eksperymentalnymi pomiarami, jednoznacznie wskazującymi, że masa ta jest niezerowa. W latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia postulowano, że Wszechświat przenika nieznane dotąd pole, łamiące lokalne symetrie cechowania i nadające wspomianym bozonom masę. Na cześć jednego z odkrywców tego pola, brytyjskiego fizyka teoretyka Petera Higgsa, pole to nazwano *polem Higgsa*, natomiast mechanizm, wedle którego pole to łamie lokalne symetrie cechowania, *mechanizmem Higgsa*. Istnienie pola Higgsa wymagało pięćdziesięciu lat na swoje empiryczne potwierdzenie, otrzymane poprzez wykrycie *bozonu Higgsa*, będącego kwantowym wzbudzeniem tego pola. Jak już wspomniano powyżej, dokonano tego w lipcu 2012 roku przy użyciu zderzacza hadronów w CERN-ie w Szwajcarii, a w 2013 roku Peter Higgs został uhonorowany Nagrodą Nobla z fizyki[36]. Pojęcie symetrii w swoim znacznym rozszerzeniu jako jej spontanicznego łamania znalazło więc ostatecznie zastosowanie w wyjaśnieniu tak fundamentalnych zagadnień fizyki, jak natura masy oraz obdarzonych nią cząstek elementarnych jako podstawowego budulca materii.

---

[36] Bardzo dobre historyczne i poglądowe wprowadzenie do mechanizmu Higgsa można znaleźć w: L. Motyka, *Historia symetrii, jej łamania i poszukiwania źródeł masy cząstek elementarnych*, „Foton" 123 (2013), s. 4–10.

Poza teorię grup

W oparciu o przeprowadzone dotychczas analizy można by słusznie oczekiwać, że w zastosowaniu do opisu symetrii teorii fizycznych teoria grup stanowi formalne narzędzie, które jednoznacznie umożliwi dalszą unifikację fizyki. W szczególności chodzi tutaj o sformułowanie kwantowej teorii grawitacji, unifikującej efekty kwantowe i grawitacyjne. Biorąc pod uwagę, że dotychczas skutecznie sprawdzał się program erlangeński, reprezentujący każdą teorię jako teorię niezmienników grup pewnych przekształceń, można by wnosić, że kwantowa teoria grawitacji również przyjmie taką postać. W pewnym sensie byłoby to uzasadnione analogicznie do zasady *pesymistycznej metaindukcji*, rozumianej jednak w tym momencie pozytywnie, że program erlangeński w sposób absolutny wskazuje niezmienniki grup przekształceń jako obiekty teoretyczne nieulegające zmianie wraz ze zmianą formalizmu teorii. Wymagałoby to jednak założenia, że sama teoria grup i warunkowane nią symetrie nie podlegają dalszym uogólnieniom. Okazuje się jednak, że takie uogólnienia są możliwe i są one realizowane przy pomocy pojęcia *grupoidu*[37]. Innymi słowy, z czysto matematycznego punktu widzenia pojęciu symetrii można nadać jeszcze bardziej uogólniony charakter, niż wynika to z teorii grup.

Pojęcie grupoidu należy do wysoce abstrakcyjnej matematyki i jest najczęściej definiowane przy pomocy *teorii kategorii*. Z oczywistych względów nie można więc w ramach niniejszego opracowania zaoferować jego matematycznie ścisłej definicji. Traktując rzecz intuicyjnie, wystarczy na obecne potrzeby stwierdzić, że w odróżnieniu od grupy w grupoidzie możliwe są tylko niektóre iloczyny (złożenia) jego elementów. Co ciekawe, można bardzo łatwo podać przykład obiektu, którego przekształcenia spełniają aksjomaty grupoidu i nie spełniają aksjomatów grupy. Obiektem tym jest prekursor słynnej kostki Rubika, czyli tak zwana *piętnastka*. Piętnastka to układanka zbudowana z pojemnika, w którym znajduje się piętnaście jednakowych klocków ułożonych w kwadrat 4×4 i ponumerowanych od 1 do 15. Jedno miejsce jest zawsze puste i daje możliwość przesuwania sąsiednich płytek względem siebie. Zadaniem dla gracza jest uporządkowanie przetasowanych płytek, pamiętając jednak, że w pojedynczym ruchu można przesunąć tylko jedną płytkę na puste miejsce.

[37] Poglądowe wprowadzenie do specyfiki pojęcia grupoidu można znaleźć w: A. Weinstein, *Groupoids: Unifying Internal and External Symmetry*, „Notices of the American Mathematical Society" 43/7 (1996), s. 744–752.

O ile operacje na kostce Rubika kwalifikują się ściśle jako grupa, to operacje dozwolone na piętnastce tworzą grupoid.

Współczesna fizyka oferuje dziś cały szereg hipotetycznych scenariuszy unifikacji ogólnej teorii względności i mechaniki kwantowej w jedną kwantową teorię grawitacji. Nie ma jednak wśród fizyków zgody co do preferowanego scenariusza, zwłaszcza że na obecnym etapie prac zunifikowanej teorii nie da się potwierdzić empirycznie. W całym bogactwie proponowanych rozstrzygnięć da się jednak wyróżnić takie, które wykorzystuje uogólnione przy pomocy grupoidu symetrie i znane jest pod nazwą *geometrii nieprzemiennych*[38]. Nieprzemienność stanowi jedną z fundamentalnych cech formalizmu mechaniki kwantowej, ponieważ w przeciwieństwie do mnożenia zwykłych liczb, gdzie wynik nie zależy od kolejności wykonywania działania, obiekty odpowiadające wielkościom obserwowalnym, czyli operatory, mnożą się w sposób zależny od tego, jak iloczyn jest wykonywany. Okazuje się bowiem, że zastosowanie grupoidu pozwala wprowadzić kwantową własność nieprzemienności do uogólnionych przy jego pomocy struktur czasoprzestrzennych ogólnej teorii względności. Rezultat ten z kolei stwarza dogodne matematyczne środowisko dla zunifikowanego opisu zjawisk kwantowych i grawitacyjnych[39]. Choć prace w tym zakresie wymagają nadal wielu wysiłków, to jednak pozwalają ufać, iż w tak uogólnionej postaci grupoidu symetria nadal utrzyma swoją siłę w zdolności unifikowania pozornie rozłącznych obszarów fizycznej rzeczywistości.

Zakończenie: ku ontologii niezmienników

Uniwersalna stosowalność sformalizowanego przy pomocy teorii grup pojęcia symetrii, jaka pojawia się na każdym etapie rozwoju unifikacji fizyki wraz z perspektywą dalszych uogólnień, rodzi słuszne pytania o ontologiczny status symetrii. Innymi słowy, chodzi o to, czy zdefiniowanych przy pomocy symetrii struktur nie można uważać za coś więcej niż tylko skuteczne narzędzie opisu rzeczywistości fizycznej i czy struktury te w choć przybliżony sposób nie odpowiadają obiektywnym strukturom tej rzeczywistości na poziomie fundamentalnym. Pytanie to niewątpliwie wpisuje się w toczącą się w filozofii

[38] Por. np. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, New York–London 1984.

[39] Por. np. M. Heller, W. Sasin, D. Lambert, *Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity*, „Journal of Mathematical Physics” 38 (1997), s. 5840–5853. Poglądowe wprowadzenie do geometrii nieprzemiennych i ich roli w formułowaniu kwantowej teorii grawitacji można znaleźć w: M. Heller, *Początek jest wszędzie*, Warszawa 2002.

nauki debatę wokół *realizmu naukowego*, którego współczesną odsłoną jest zainicjowany przez Johna Woralla nurt *realizmu strukturalistycznego*[40]. Samo zagadnienie realizmu strukturalistycznego również owocuje ożywionymi i dość zawiłymi debatami, w których rozważa się, co uznać można za obiektywnie istniejącą strukturę rzeczywistości[41]. W jego obszarze z kolei wymienia się *realizm strukturalistyczny teorii grup* (ang. *group structural realism*), wedle którego strukturę wprost utożsamia się z grupami symetrii[42].

W ramach podsumowania niniejszego opracowania zasugerowana zostanie odmienna propozycja ontologii rzeczywistości fizycznej jako struktury określanej formalizmem zmatematyzowanej teorii. Jej motywacja wynika z prostej obserwacji, że tak szeroko akcentowany w trakcie prowadzonych analiz program erlangeński, realizujący się dotychczas, jak pokazano, we wszystkich dobrze empirycznie potwierdzonych teoriach fizycznych, napotyka na istotne ograniczenia ze względu na istnienie uogólnionego w stosunku do teorii grup pojęcia symetrii, jakie warunkuje grupoid, o którym mowa była powyżej. Nie można też w takiej perspektywie utożsamiać struktury z teorią grup, jak to postuluje realizm strukturalistyczny teorii grup. Zdecydowanie lepszym wyznacznikiem struktury zdaje się więc grupoid, choć pamiętać należy, że z matematycznego punktu widzenia grupoid jest kategorią, a to kategorie uważane są dziś za najbardziej ogólny wyznacznik struktury czy wręcz za „strukturę struktur”[43]. Co więcej, okazuje się także, że posiadającym fizyczne znaczenie niezmiennikom można nadać precyzyjny sens w teorii kategorii[44].

W sugerowanej propozycji ontologii akcent położony zostanie nie na matematyczną klasyfikację operacji symetrii, jak czyni to przykładowo teoria grup, ale na własności struktury, która względem tych operacji pozostaje niezmiennicza. Sam fakt, że istnieje osobno sformułowana *teoria niezmienników* świadczy, iż całkowite utożsamienie struktury z teorią grup lub jej bardziej

---

[40] J. Worall, *Scientific Realism and Scientific Change*, „The Philosophical Quarterly” 128 (1982), s. 201–231; J. Worall, *Structural Realism: The Best of Both Worlds?*, „Dialectica” 43 (1989), s. 99–124.

[41] Por. np. S. French, *The Structure of the World*, dz. cyt.

[42] B.W. Roberts, *Group Structural Realism*, „The British Journal for the Philosophy of Science” 62/1 (2011), s. 47–69.

[43] Por. np. M. Heller, *The Field of Rationality and Categoty Theory*, w: *Mathematical Structures of the Universe*, Kraków 2014, s. 441–457.

[44] J. Symons, J.C. Urenda, V. Kreinovich, *Towards a General Description of Physical Invariance in Category Theory*, „Journal of Uncertain Systems” 1/3 (2007), s. 201–205.

uogólnionymi postaciami może pomijać istotne dla ontologii rozróżnienie[45]. Nie wchodząc obecnie w matematyczne arkana teorii niezmienników, dla wstępnego potraktowania tematu wystarczy przytoczyć *twierdzenie Hilberta o niezmiennikach*, które pokazuje ciekawą ich własność, jaką jest *skończoność bazy generatorów niezmienników*. Twierdzenie to zostało udowodnione przez Davida Hilberta dla wielomianów poddawanych liniowym przekształceniom występujących w nich zmiennych, gdzie rolę niezmiennika odgrywa wyróżnik równania, znany z metod rozwiązywania równań kwadratowych jako Δ[46]. Ujmując rzecz w największym skrócie: twierdzenie Hilberta mówi, że o ile liczba takich niezmienników dla danego równania może być nieskończona, o tyle liczba ich generatorów, czyli takich niezmienników, z których można uzyskać wszystkie pozostałe, osiąga wartość skończoną.

W tym miejscu poczynić należy kilka stosownych uwag. Po pierwsze, twierdzenie o niezmiennikach udowodnione jest dla wąskiej klasy obiektów matematycznych i przekształceń, w związku z czym ekstrapolowanie tego rezultatu na bardziej złożone obiekty będzie posiadało jedynie hipotetyczny charakter. Po drugie, głębszego filozoficznego zinterpretowania wymaga niewątpliwie pojęcie *generatora*, które w pierwszym czysto intuicyjnym podejściu skojarzyć można z tymi własnościami badanej struktury, które posiadają najbardziej pierwotny charakter, nieredukowalny do innych struktur. W takiej postaci generator bardziej niż inne pochodne względem niego niezmienniki może zasługiwać na miano elementu konstytutywnego rzeczywistości. Innymi słowy, samo wskazanie struktury niezmienniczej jeszcze nie warunkuje jej obiektywnego charakteru. Po trzecie, pojęcie niezmienniczości w filozofii posiada bardzo duże znaczenie, ponieważ jest ono blisko związane z pojęciem *konieczności*, bezpośrednio wiązanej z kolei w tradycji filozoficznej z istnieniem. Warto w tym momencie zaznaczyć, że niezmienniczość jest również wiązana z obiektywnością, czego wyraz dawał przykładowo Herman Weyl, stwierdzając: „obiektywność oznacza niezmienniczość względem grupy automorfizmów"[47]. Niezmienniczość warunkowałaby więc odseparowanie tego, co jest artefaktem ludzkiego opisu, od struktur obiektywnej rzeczywistości. Po czwarte, skończoność zbioru generatorów wskazuje, że zbiory generatorów

[45] Por. np. K. Maurin, *Matematyka a fizyka*, Warszawa 2010, s. 93–110.

[46] C. McLarty, *Hilbert on Theology and its Discontents: The Origin Myth of Modern Mathematics*, w: A. Doxiadis, B. Mazur (red.), *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*, Princeton 2012, s. 105–129.

[47] H. Weyl, *Symmetry*, Princeton 1952, s. 132.

mogą być dla różnych obszarów rzeczywistości różne, w efekcie czego swoje uzasadnienie może zyskać również filozoficznie doniosły problem różnorodności w przyrodzie. Zastosowanie teorii niezmienników do budowy ontologii rzeczywistości fizycznej daje niewątpliwie szerokie perspektywy badawcze, wymaga ono jednak nadal wielu szczegółowych interpretacji i zależne też będzie od dalszego rozwoju tej teorii. Jako zwieńczenie całości dociekań, zaprezentowanych w ramach niniejszego studium, wyrazić należy nadzieję, że takiej odsłonie symetria nadal pokaże swoją siłę nie tylko jako skuteczne narzędzie opisu rzeczywistości fizycznej na poziomie fundamentalnym, ale także jako konstytutywny element jej ontologii.

Bibliografia

A.D. Aczel, *Wielkie twierdzenie Fermata. Rozwiązanie zagadki starego matematycznego problemu*, tłum. P. Strzelecki, Prószyński i S-ka, Warszawa 1998.

K. Brading, E. Castellani (red.), *Symmetries in Physics. Philosophical Reflections*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.

A. Brożek, *Symetria w muzyce*, OBI – Biblos, Tarnów 2004.

A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, New York–London 1984.

P. Curie, *Sur la symétrie dans les phénomènes physiques, symétrie d'un champ électrique et d'un champ magnétique*, „Journal de Physique" 3 (1894), s. 393–417.

B. Dembiński, *Późny Platon i Stara Akademia*, Wydawnictwo Marek Derewiecki, Kęty 2010.

J. Earman, *World Enough and Space-Time. Absolute versus Relational Theories of Space and Time*, A Bradford Book – The MIT Press, Cambridge, Massachusetts–London, England, 1989.

M.C. Ghyka, *Złota liczba*, tłum. I. Kania, Universitas, Kraków 2001.

J. Earman, J.D. Norton, *What Price Spacetime Substantivalism*, „The British Journal for the Philosophy of Science" 38 (1987), s. 515–525.

A. Grodzicki, *Symetria cząsteczek i ich widma oscylacyjne*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1988.

M. Heller, *Początek jest wszędzie*, Prószyński i S-ka, Warszawa 2002.

M. Heller, *Some Mathematical Physics for Philosophers*, Pontifical Council For Culture, Pontifical Gregorian University, Vatican City–Rome 2005.

M. Heller, W. Sasin, D. Lambert, *Groupoid Approach to Noncommutative Quantization of Gravity*, „Journal of Mathematical Physics" 38 (1997), s. 5840–5853.

M. Heller, *The Field of Rationality and Categoty Theory*, w: *Mathematical Structures of the Universe*, Copernicus Center Press, Kraków 2014, s. 441–457.

A. Herdegen, *Wykłady z algebry liniowej i geometrii*, Discepto, Kraków 2005.

G. Hon, B.R. Goldstein, *From Summetria to Symmetry: The Making of a Scientific Revolutionary Concept*, Springer 2008.

F. Huang, *Podstawy fizyki statystycznej*, tłum. M. Załuska-Kotur, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006, s. 93–108.

C.J. Isham, *Lectures on Groups and Vector Spaces for Physicists*, World Scientific, Singapore–New Jersey–London–Hong Kong 1989.

M. Kordos, *Wykłady z historii matematyki*, SCRIPT, Warszawa 2006.

K. Maurin, *Matematyka a fizyka*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2010, s. 93–110.

C. McLarty, *Hilbert on Theology and its Discontents: The Origin Myth of Modern Mathematics*, w: A. Doxiadis, B. Mazur (red.), *Circles Disturbed: The Interplay of Mathematics and Narrative*, Princeton, Princeton University Press 2012, s. 105–129.

L. Motyka, *Historia symetrii, jej łamania i poszukiwania źródeł masy cząstek elementarnych*, „Foton" 123 (2013), s. 4–10.

J.D. Norton, *Did Einstein Stumble? The Debate over General Covariance*, „Erkenntnis" 42 (1995), s. 223–245.

R. Penrose, *The Structure of Space-time*, w: C.M. DeWitt, J.A. Wheeler (red.), Battelle Recontres, Benjamin, New York 1968, s. 121–235.

Platon, *Timajos*, tłum. W. Witwicki, Wydawnictwo ANTYK, Kęty 2002.

D.J. Raine, M. Heller, *The Science of Space-Time*, Pachart, Tucson 1981.

B.W. Roberts, *Group Structural Realism*, „The British Journal for the Philosophy of Science", 62/1 (2011), s. 47–69.

E.M. Rogers, *Fizyka dla dociekliwych. Astronomia. Rozwój teorii astronomicznych*, tłum. M. Kubiak, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1976.

L. Smolin, *Trzy drogi kwantowej grawitacji*, Wydawnictwo CiS, Warszawa 2001.

L. Sokołowski, *Elementy analizy tensorowej*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa 2010.

I. Stewart, *Dlaczego prawda jest piękna. O symetrii w matematyce i w fizyce*, tłum. T. Krzysztoń, Prószyński i S-ka, Warszawa 2012.

J. Symons, J.C. Urenda, V. Kreinovich, *Towards a General Description of Physical Invariance in Category Theory*, „Journal of Uncertain Systems" 1/3 (2007), s. 201–205.

A. Trautman, *A Classification of Space–Time Structures*, „Reports on Mathematical Physics" 10 (1976), s. 297–310.

W. Tatarkiewicz, *O filozofii i sztuce*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 1986.

S. Weinberg, *Teoria pól kwantowych. Podstawy*, tłum. D. Rzążewska, Wydawnictwo Naukowe PWN 2012, s. 268–270.

H. Weyl, *Symmetry*, Princeton University Press, Princeton 1952.

E.P. Wigner, *Symmetries and Reflections*, Indiana University Press, Bloominghton–Indiana 1967.

J. Worall, *Scientific Realism and Scientific Change*, „The Philosophical Quarterly" 128 (1982), s. 201–231.
J. Worall, *Structural Realism: The Best of Both Worlds?*, „Dialectica" 43 (1989), s. 99–124.
A. Zee, *Fearful Symmetry*, Princeton University Press, Princeton and Oxford 2007.

lipiec, 2016

ks. Wojciech P. Grygiel FSSP, dr hab., Katedra Filozofii Przyrody UPJPII w Krakowie. Zainteresowania naukowe: filozofia fizyki (zagadnienia ontologiczne i epistemologiczne), nauki kognitywne (w szczególności religioznawstwo kognitywne), relacje nauka – wiara, metodologia i epistemologia teologii.

DOI: http://dx.doi.org/10.15633/9788374386487.26